Université Claude Bernard, Lyon-1

Préparation agreg. ext. de math.

Matlab - Stixbox

année 2001-2002

Travaux pratiques

1) Calcul du prix d'une option d'achat par la méthode de Monte-Carlo.

On cherche à calculer le prix d'un call $C = E[(e^G - 1)^+]$, et le prix d'un put $P = E[(1 - e^G)^+]$, où G représente le cours de l'action et suit une loi normale centrée réduite. Il est possible de calculer la vraie valeur de C et P en fonction de la fonction de répartition de la loi normale (à faire). Donner d'autre part des estimations en utilisant les techniques :
- Monte-Carlo classique pour C et P,
- échantillonnage préférentiel : introduire une variable exponentielle pour estimer P,
- variables de contrôle : améliorer l'estimation de C en utilisant une estimation pour P,
- variables antithétiques : utiliser que G et $-G$ ont même loi.

Dans chaque cas, donner l'estimation, la vraie valeur, ainsi qu'un intervalle de confiance.

2) Loi des grands nombres et théorème central limite.

Illustrer graphiquement la convergence de la moyenne empirique d'un échantillon simulé vers la moyenne théorique. Donner un exemple où la loi des grands nombres ne s'applique pas.

Illustrer encore graphiquement grâce à un histogramme la convergence en loi de la moyenne empirique vers la loi normale. On pourra par exemple simuler un grand échantillon de la somme de 12 variables uniformes sur $[0,1]$. En déduire une technique pour simuler la loi normale.

3) Processus de Poisson.

Simuler de deux manières différentes un processus de Poisson (se souvenir que les temps inter-arrivées sont iid, de loi exponentielle, et que sachant le nombre d'arrivées au temps t, les instants d'arrivées sont uniformément répartis sur $[0,t]$).

4) Processus de branchement.

On étudie la taille d'une population au fil des générations. Soit Z_0 la taille de la population à l'instant 0. Chaque individu a un nombre de descendants qui suit une loi que nous appelons loi de reproduction (par exemple, la loi binomiale). Bien sûr, on suppose que les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres. Soit Z_1 le nombre de descendants des Z_0 individus présents dans la population à l'instant 0. Et ainsi de suite. Soit Z_n la taille de la population à l'instant n.

- Simuler quelques réalisations de tels processus, pour différentes lois de reproduction.
- Simuler 30 processus de branchement dans chacun des cas : super-critique ($m > 1$), critique ($m = 1$) et sous-critique ($m < 1$), où m est l'espérance de la loi de reproduction. Tracer à chaque fois $M_n = Z_n/m^n$.

5) Marches aléatoires et ruine du joueur.

Tracer une réalisation d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}^2$. Appliquer le cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{R}$ à la ruine du joueur : un joueur dispose d'une fortune initiale de i euros. À chaque étape du jeu, il gagne 1 euro avec la probabilité p et il perd 1 euro avec la probabilité $q = 1-p$. Le jeu s'arrête quand le joueur est ruiné ou quand il a en poche N euros (la partie adverse est ruinée). Vérifier, dans le cas $p < 1/2$, que la probabilité qu'il gagne tend vers 0 quand N devient grand.

6) Fonction de répartition empirique.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de la loi de X, v.a. de fonction de répartition F. La fonction de répartition empirique de cet échantillon est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

Générer un échantillon et tracer sa fonction de répartition empirique. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ converge p.s. vers $F(x)$. Le vérifier graphiquement. Calculer la distance $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ et la tracer en faisant varier n.

7) Chaînes de Markov :

- Simuler une chaîne de Markov à deux états 1 et 2 de matrice de transition $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Trouver la loi stationnaire.

- Simuler une chaîne de Markov à trois états 1, 2 et 3, de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver la loi stationnaire.